

گنبد قابوس بنایی تاریخی از سدهٔ چهارم هجری است که در شهر گنبد کاووس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج تمام آجری جهان به شمار می‌رود. این برج **استوانه‌ای** که گنبدی **مخروطی** شکل روی آن قرار گرفته است ۵۵ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل **منشور** روی بدنهٔ استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شما در این فصل با حجم‌های استوانه، مخروط و منشور آشنا می‌شوید.

درس اول: حجم و مساحت کره

در سال‌های قبل با انواع حجم‌های هندسی آشنا شدید. این حجم‌ها به سه دسته تقسیم می‌شد: منشوری، کره و هرمی.

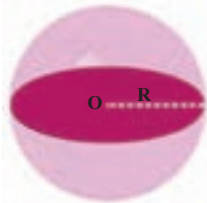


کره زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کره‌ای است. چند نمونه دیگر از حجم‌های کره‌ای را نام ببرید.

فعالیت

۱- به تعریف دایره به عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید:

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره می‌گوییم.



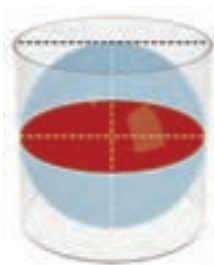
با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.

کره مجموعه _____ از فضا است که _____ مرکز _____ هستند. به این اندازه _____ می‌گوییم.



۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت، راه محاسبه حجم کره را پیدا کنیم.

- یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.
- مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی، قطر کره را اندازه بگیرید.



● مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید به طوری که توپ کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن مماس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را بر حسب R نشان دهید.

ارتفاع استوانه :

شعاع قاعده استوانه :

حجم استوانه :



● توپ را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را ببرید تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره‌ها را در داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود با دو نیم کره، فضای باقیمانده پر از آب می‌شود.

الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟

ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟

ج) بنابراین حجم کره ——— برابر حجم استوانه است.

د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه، که در بالا ذکر شد،

دستور محاسبه حجم کره به شعاع R را به دست آورید.

$$\text{حجم کره ای به شعاع } R \text{ از دستور } V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ به دست می‌آید.}$$

کار در کلاس

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع 10° سانتیمتر محاط شده است.

الف) حجم کره را به دست آورید.

ب) حجم استوانه را به دست آورید.

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

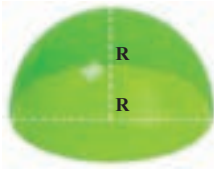
۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع 10° سانتیمتر را به دست آورید.



۱- مانند شکل مقابل، نیم کره‌ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد و آن را بیوشاند.

این دو دایره کاغذی را هرطور که دوست دارید برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حدامکان، کاغذها روی هم قرار نگیرد و سطح نیم کره نیز دیده نشود!

آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بیوشانید؟ در مورد مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه‌های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفتگو کنید.



۲- ثابت می‌شود که مساحت رویه یک نیم کره به شعاع R ، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره).
الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با: _____
ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با: _____

$$S = 4\pi R^2$$

مساحت یک کره به شعاع R برابر است با:

کار در کلاس

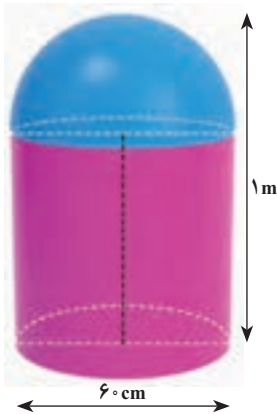


۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع 10 سانتیمتر را پیدا کنید.

۲- می‌خواهیم یک نیم کره چوبی توپر به شعاع 10 سانتیمتر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ شده را پیدا کنید.

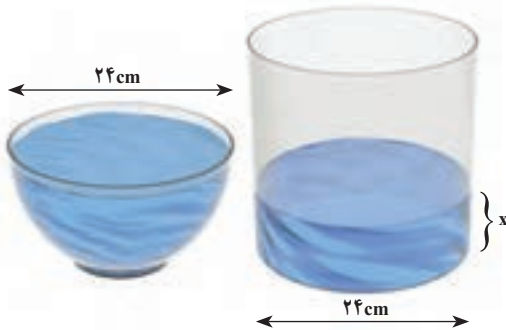
بین محاسبه مساحت کل نیم کره چوبی توپر و مساحت رویه یک عرق چین چه تفاوتی هست؟

- ۱- قطر تقریبی کره زمین حدود 12800 کیلومتر است.
 الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.
 ب) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب متر با نماد علمی بنویسید.
 ج) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.
 د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود $1/648/000$ کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.



- ۲- یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده کپسول 60 سانتیمتر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کپسول را بر حسب متر مکعب به دست آورید.

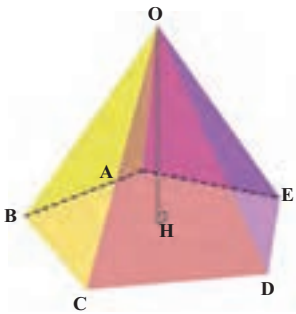
اگر بخواهیم سطح کل این کپسول را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به 100 گرم رنگ نیاز داشته باشد.



- ۳- پیمانه‌ای به شکل نیم کره و به قطر دهانه 24 سانتیمتر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟



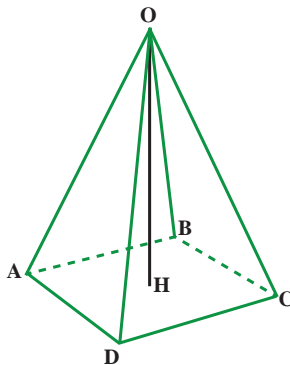
یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. نمونه‌ی دیگری از شکل‌های هرمی را نام ببرید.



هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده هرم، یک چند ضلعی است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی، سطح‌هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس، یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه جانبی می‌گویند. در هرم مقابل، نام رأس : تعداد وجه‌ها : شکل وجه‌ها : شکل قاعده : نام قاعده :

به فاصله‌ی رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در شکل، OH بر قاعده $ABCDE$ عمود است و ارتفاع هرم است. معمولاً برای نام‌گذاری هرم از رأس شروع می‌کنیم؛ به عنوان مثال هرم بالا به صورت $OABCDE$ خوانده می‌شود.

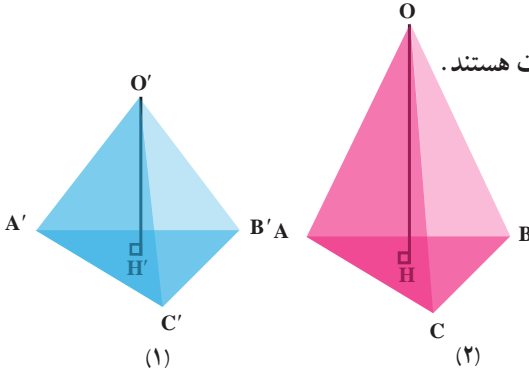
فعالیت



۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشد، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد. در هرم منتظم مقابل، نام رأس : ارتفاع : شکل قاعده : شکل وجه‌های جانبی : تعداد وجه‌ها :

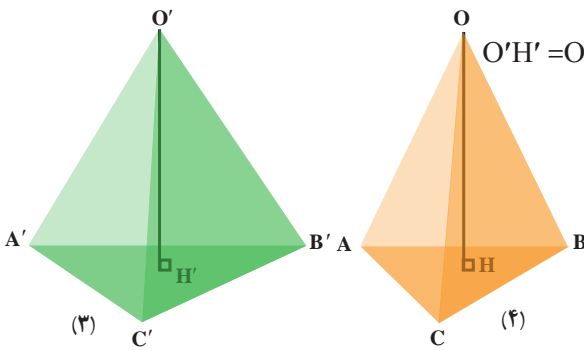
۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در

شکل‌های (۱) و (۲) مثلث‌های قاعده هم‌نهشت هستند.



$$O'H' < OH \Rightarrow V' < V$$

در شکل‌های (۳) و (۴) ارتفاع‌ها برابر است.



$$O'H' = OH \text{ و } S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' > V$$

ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟

ج) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می‌کردید؟ برای محاسبه حجم هرم چه

حدسی می‌زنید؟

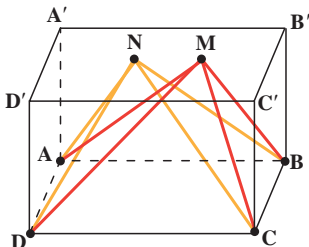
د) اگر دو هرم دارای قاعده‌های با مساحت مساوی و ارتفاع‌های مساوی باشند، درباره حجم‌های

آنها چه می‌توانید بگویید؟

اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم‌مساحت و ارتفاع‌های مساوی باشند، حجم‌های

آنها با هم برابر است.

کار در کلاس



در شکل مقابل، $ABCD$ یک وجه یک مکعب مستطیل و

M و N دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل $(A'B'C'D')$ است. چرا

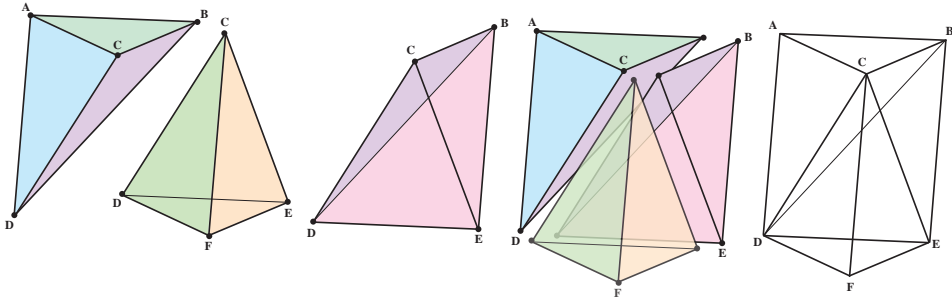
هرم‌های $MABCD$ و $NABCD$ دارای حجم‌های یکسان است؟

به این ترتیب چند هرم می‌توان ساخت که با هرم‌های بالا

حجم یکسان داشته باشند؟

محاسبه حجم هرم

در شکل زیر، منشور با دو قاعده $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ را ملاحظه می کنید. نقطه C را به نقطه های E و D و نقطه B را به نقطه D وصل می کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می کنیم. آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می دهید؟ با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم های برابر دارد و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.

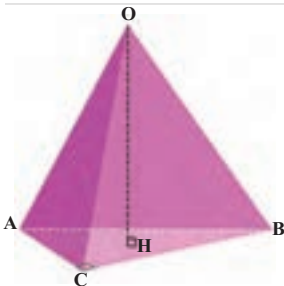


- ۱- چهارضلعی $ABED$ ، چه نوع چهارضلعی است؟ چرا مثلث های ABD و BDE هم مساحتند؟
- ۲- چرا هرم های $CBAD$ و $CBED$ دارای حجم های برابر هستند؟
- ۳- چرا مثلث های ABC و DEF هم مساحتند؟
- ۴- چرا هرم های $CDEF$ و $DABC$ دارای حجم های برابر هستند؟
- ۵- با توجه به پاسخ سؤال های ۲ و ۴ چه نتیجه ای می گیریم؟

حجم هر هرم با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

کار در کلاس



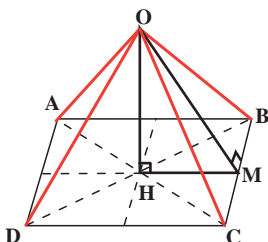
در شکل مقابل هرم $OABC$ دارای قاعده ABC است که در آن ارتفاع OH و $\angle ACB = 90^\circ$ و $BC = 10 \text{ cm}$ و $AC = 6 \text{ cm}$ آن هرم مساوی 5 cm است. با کامل کردن عبارت های زیر حجم هرم را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{\text{---} \times \text{---}}{\text{---}} = \text{--- cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \text{---} \times \text{---} = \text{--- cm}^3$$

فعالیت

۱- در شکل زیر، هرم منتظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و طول ساق‌های آنها 10 cm و M وسط BC است.



(الف) پاره خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟

(ب) مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟

(ج) اگر طول ضلع قاعده، 12 cm باشد به کمک قضیه فیثاغورس

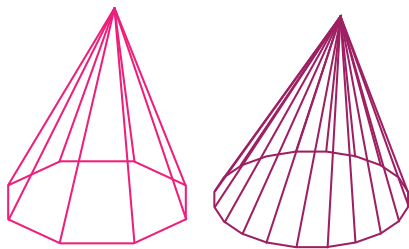
در مثلث OBM طول OM را حساب کنید.

(د) مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟

(ه) به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OMH ، طول OH را

به دست آورید.

(و) حجم هرم $OABCD$ را به دست آورید.



۲- هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک

چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم،

شش ضلعی منتظم و حال تعداد ضلع‌های این

چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چند ضلعی فوق به چه

شکلی نزدیک می‌شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟

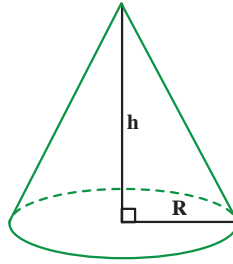


مخروط، شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره

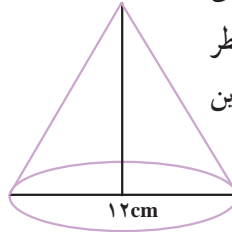
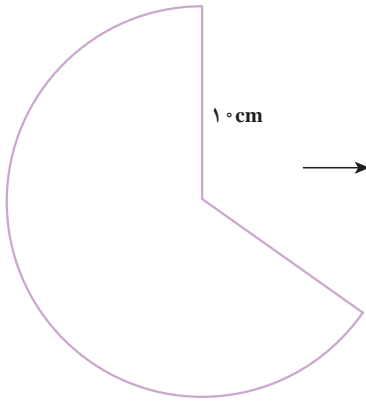
و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

از اینجا نتیجه می‌شود که حجم مخروط، مانند حجم هرم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$



کار در کلاس



علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع 10 cm، مخروطی به قطر قاعده 12 cm ساخته است. حجم این مخروط را به دست آورید.

تمرین

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد 6 و 5 سانتیمتر و ارتفاع آن 10 سانتیمتر باشد.

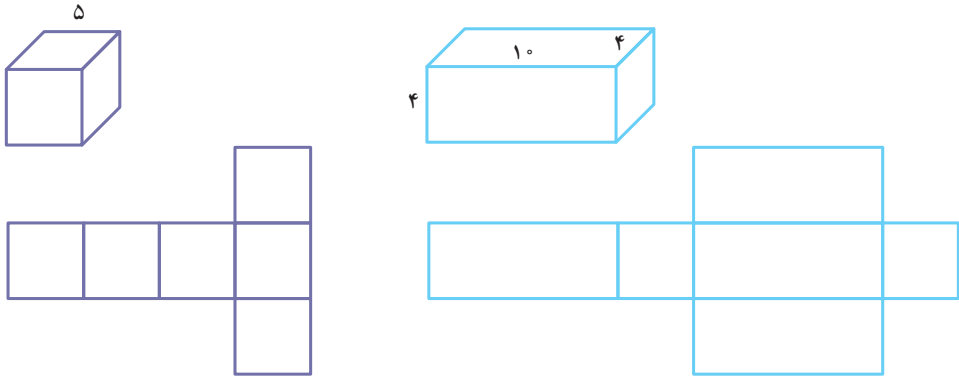
۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن 4 cm باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های 8 cm باشد.

۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه 4 cm و به ارتفاع 12 cm را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعده آن 6 cm است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

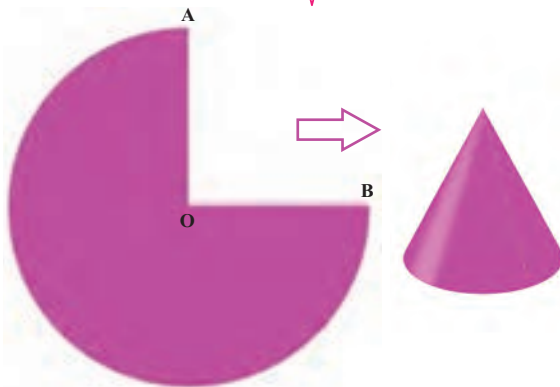
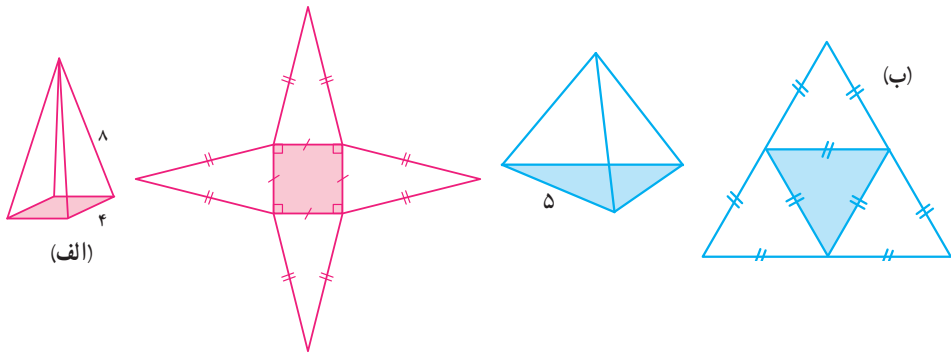


فعالیت

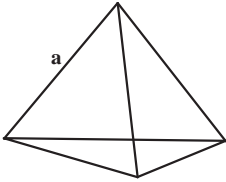
۱- با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع‌ها را در گسترده هر کدام مشخص کنید.



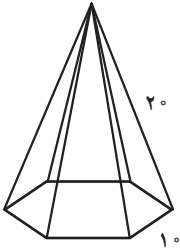
۲- مساحت گسترده هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.



۳- $\frac{3}{4}$ دایره‌ای به شعاع 10 سانتیمتر را برداشته‌ایم؛ با کمک آن یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟ چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعده مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید.



۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید که طول همه یال‌های آن a است.



۲- با توجه به اندازه ضلع قاعده شش ضلعی منتظم و اندازه یال هرم، مساحت جانبی هرم را پیدا کنید.

فعالیت

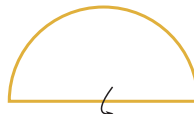


۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می‌آید؟
شعاع قاعده شکل حاصل : ارتفاع شکل حاصل :
..... حجم شکل حاصل را پیدا کنید.

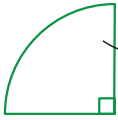


۲- اگر مثلث قائم الزاویه را حول ضلع مشخص شده در شکل، دوران دهیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ حجم آن را پیدا کنید.
شعاع قاعده شکل حاصل : ارتفاع شکل حاصل :
.....

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل را توصیف کنید.



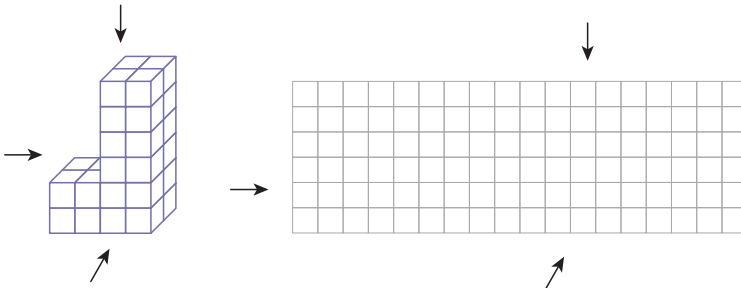
کار در کلاس



حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵cm را حول شعاع آن پیدا کنید.

فعالیت

۱- با توجه به حجم مقابل در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت های مشخص شده را رسم کنید.

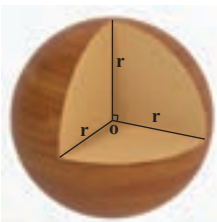


۲- اگر هر کدام از هرم های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می شود؟

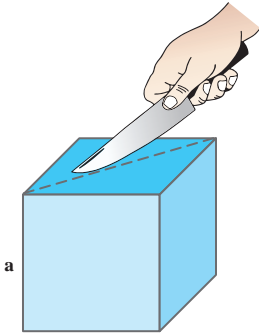
الف) هرم منتظم با قاعده شش ضلعی ب) هرم منتظم با قاعده مربع ج) هرم منتظم با قاعده مثلث



۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟



۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟



یک اسفنج مکعب شکل به ضلع a را مانند شکل مقابل بریده ایم. سطح بریده شده به چه شکلی است؟ اندازه ضلع های آن را پیدا کنید.

تمرین

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

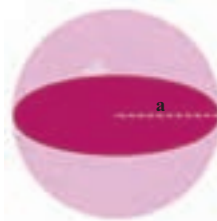
مکعب به ضلع a



$$V =$$

$$S =$$

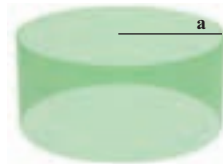
کره به شعاع a



$$V =$$

$$S =$$

استوانه به ارتفاع و شعاع قاعده a



$$V =$$

$$S =$$

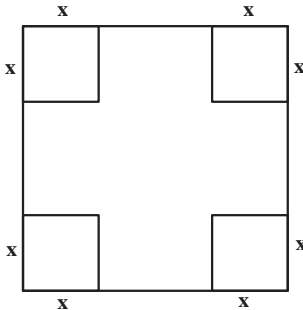
استوانه به ارتفاع و قطر قاعده a



$$V =$$

$$S =$$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح ($\frac{V}{S}$) را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ تر است؟



۲- از یک مقوا به ضلع a گوشه های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده ایم. چه رابطه ای بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد.

